Hallo!

Erzeugende Funktionen sind ein Mittel um lineare Rekursionen schneller ausrechnen zu können. Es soll die Funktion nicht mehr als Rekursion angeschrieben werden, sondern so, dass man nur n einsetzen muss, und sofort das n-te Glied der Rekursion erhält, ohne sich die ganzen anderen davor ausrechnen zu müssen.
Eine lineare Rekursion schaut z.B. so aus: $a_n = a_{n-1} + 3a_{n-2} - 5a_{n-3}$. Das bedeutet, das n-te Glied erhält man, indem man zum $(n-1)$-ten 3 mal das $(n-2)$-te addiert und noch 5 mal das $(n-3)$-te abzieht. n ist irgendeine natürliche Zahl (siehe weiter unten).
„Linear“ bedeutet, dass die einzelnen Glieder höchstens mit irgendeiner Zahl multipliziert werden dürfen, bevor sie zusammen gezählt oder voneinander abgezogen werden. Sie dürfen nicht potenziert werden, also z.B. darf nicht a_{n-1}^2 vorkommen oder $\sqrt{a_{n-1}}$. Eine Wurzel ist nämlich auch eine Potenz, dazu kommen wir später noch.

In dieser Workshop-Reihe werden wir lernen, wie man erzeugende Funktionen mit der Hand, also ohne Computer, erstellt. Dafür braucht man einiges an Grundlagen, die aber auch für andere mathematische Themen sehr wichtig sind. Außerdem kann man gut damit angeben und sehr klug erscheinen. Los geht's:

Grundlagen

Mengen

In einer Menge werden verschiedene Objekte zusammen gefasst. Das kann ein einzelnes Objekt sein, es können ein paar Objekte sein, unendlich viele oder gar keines. Formal angeschrieben werden Mengen, indem man die Objekte innerhalb von geschwungenen Klammern schreibt oder sie einfach benennt. Die Objekte werden <u>Elemente</u> der Menge genannt.

Beispiele:

- $\{1, 2, 3\}$
- $\{5\}$
- A sei die Menge der christlichen Päpste, kann auch geschrieben werden als $A :=$ Menge der christlichen Päpste
- $\{1, 2, 3, 4, ...\}$ = Menge der natürlichen Zahlen = $\mathbb{N}$. Je nach Geschmack kann man die natürlichen Zahlen bei 0 oder bei 1 beginnen lassen. Mathematiker lassen sie meistens bei 1 beginnen, obwohl sie laut DIN bei 0 beginnen sollten. Wichtig ist nur, dass man dazu sagt, wo man die natürlichen Zahlen beginnen lässt. Beginnt man bei 1 und möchte die 0 doch ausnahmsweise dazu nehmen, schreibt man $\mathbb{N}_0$.
- $\mathbb{R}$ = Menge der reellen Zahlen. Diese Menge lässt sich nicht aufzählen wie die natürlichen Zahlen. Das sind alle „normalen“ Zahlen zwischen $-\infty$ und $+\infty$.

- $\{\} = \emptyset$ =die leere Menge, die Menge die kein Element enthält.

Zwei Mengen können auch gleich sein, obwohl die Bezeichnungen auf den ersten Blick verschieden sind. Z.B. $M :=$ die Menge der jüdischen Päpste $= \emptyset$

Das Element-Symbol zeigt an, ob ein Element in einer Menge enthalten ist:
$x \in A$ bedeutet, das Element x ist in der Menge A enthalten.
$x \notin A$ bedeutet, das Element x ist in der Menge A nicht enthalten.

Beispiele:

- $3 \in \mathbb{N}$
- $\pi \notin \mathbb{N}$
- $\pi \in \mathbb{R}$

Man möchte oft Aussagen über Mengen treffen, z.B. ob in einer Menge ein Element enthalten ist, für das irgendeine Eigenschaft gilt.
Dazu verwendet man folgende Symbole, die Quantoren genannt werden:

- $\forall\ x \in A$ bedeutet, für alle Elemente x der Menge A gilt irgendwas. Z.B. $\forall$ Farben $\in$ Wörter gilt sichtbar. Das „gilt“ wird meistens als Doppelpunkt geschrieben. $\forall$ heißt <u>All-Quantor</u>.
- $\exists\ x \in A$ bedeutet, dass es ein Element x der Menge A gibt, für das irgendwas gilt. Das muss nicht nur ein Element sein, es können auch mehrere oder sogar alle sein. $\exists$ heißt <u>Existenz-Quantor</u>. Möchte man betonen, dass es genau ein solches Element, nicht mehr und nicht weniger gibt, schreibt man ein Rufzeichen daneben: $\exists\,!$

Für die beiden Quantoren gibt es auch gegenteilige Aussagen:

- Die Verneinung von „ $\forall\ x$ gilt blah“ ist „ $\exists\ x$ sodass blah gilt nicht“. Ein Beispiel: Die Verneinung von „Alle Menschen haben ein Haus.“ ist „Es gibt (mindestens) einen Menschen, der kein Haus hat.“
- Analog (= mathematisch für „funktioniert genauso“) geht es mit der Verneinung von „ $\exists\ x$ sodass blah gilt“. Diese lautet „ $\forall\ x$ gilt blah nicht“. Die Verneinung von „Es gibt einen Menschen, der ein Haus hat.“ lautet also „Alle Menschen haben kein Haus.“ Man kann auch den Existenz-Quantor einfach durchstreichen: „$\nexists x$ sodass blah gilt“ oder im Beispiel „Es gibt keinen Menschen der ein Haus hat.“

Gleichungen

Um eine quadratische Gleichung zu lösen, muss man sie in eine bestimmte Form bringen, dann ein paar Zahlen herauspicken und in eine Formel einsetzen. Diese rechnet man dann aus und erhält zwischen 0 und 2 Ergebnisse.

Was bedeutet überhaupt „quadratische Gleichung“ und wie sieht sowas aus?
Eine quadratische Gleichung hat irgendwo x^2 („quadratisch“) stehen und irgendwo = („Gleichung“). Bei keinem x darf aber eine höhere Potenz als 2 vorkommen.

Beispiele:

- $3x^2 = 2x^2 - 4$
- $x^2 + 4x + 4 = 0$
- $2x^2 + 6 = -2 - x$

Man kann die Gleichung in die Form $ax^2+bx+c = 0$ bringen (a,b und c sind irgendwelche Zahlen aus $\mathbb{R}$ und heißen Koeffizienten) und dann in folgende Lösungsformel einsetzen:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Außerdem werden wir sogenannte Lineare Gleichungssysteme lösen müssen. „Linear“ bedeutet hier wieder, dass keine Potenzen vorkommen (wer es gerne pedantisch hat: dass keine anderen Exponenten als 1 und 0 vorkommen), „-system“ deshalb, weil es mehrere Unbekannte zu berechnen gibt. Damit das Gleichungssystem lösbar ist, braucht man so viele Gleichungen wie es Unbekannte gibt, und hat dann verschiedene Möglichkeiten, wie man an die Lösungen kommen kann.

Beispiele:

- $3x = 4y - 29$
  $3x = 16 - 5y$
- $y = 53 - 8x$
  $15x - 8y = 50$
- $11x + 5y = 149$
  $7x + 10y = 13$

Wie kommt man an die Lösungen?

- Beim Gleichsetzungsverfahren hat man beide Male auf einer Seite vom = das gleiche stehen. Also müssen auch die anderen Seiten gleich sein. Das nutzt man aus, indem man die Gleichungen so umformt, dass man auf einer Seite alle x (oder alle y) stehen hat, und dann eine Gleichung so multipliziert, dass beide linken Seiten gleich sind. Die rechten Seiten kann man dann gleichsetzen, und das y ausrechnen. Dieses setzt man dann in eine der beiden ursprünglichen Gleichungen ein und erhält das x - siehe 1. Beispiel.
- Beim Einsetzungsverfahren drückt man eine Unbekannte in einer Gleichung explizit aus, und setzt diesen Ausdruck dann anstelle der Unbekannten in die andere Gleichung ein. Wieder kann man sich die andere Unbekannte dann direkt ausrechnen und setzt das Ergebnis dann in eine der ursprünglichen Gleichungen ein - siehe 2. Beispiel.
- Das Additionsverfahren verwendet man am häufigsten, da man damit Gleichungssysteme mit beliebig vielen Unbekannten mit einem Algorithmus lösen kann. Dieser funktioniert bei zwei Unbekannten (mehr behandeln wir jetzt nicht) so, dass man eine der beiden Gleichungen mit einer solchen Zahl multipliziert, dass danach eine der beiden Unbekannten in beiden Gleichungen gleich oft vorkommt. Die eine Gleichung wird dann von der anderen abgezogen - wieder ist eine Variable verschwunden und es geht weiter wie bei den anderen Verfahren. Beispiel 3.

Bei linearen Gleichungssystemen kann es vorkommen, dass es überhaupt keine Lösung gibt: Es gibt z.B. keine Zahlen x und y, die man in folgende Gleichungen einsetzen könnte:
$x + y = 5$
$x + y = 3$

Außerdem kann es passieren, dass ein Gleichungssystem unendlich viele Lösungen hat. Z.B. ist bei den beiden Gleichungen
$x + y = 5$
$2x + 2y = 10$
die zweite Gleichung nur die erste mit 2 multipliziert, es handelt sich also um „die selbe“ Gleichung. Man kann jede reelle Zahl x einsetzen und bekommt ein passendes y (oder umgekehrt).

Diese Sonderfälle werden uns bei den erzeugenden Funktionen aber nicht unterkommen (außer wir machen irgendwo einen Fehler).

Rechnen mit Potenzen

Wir brauchen ein paar Rechenregeln. a und b sind Zahlen, die potenziert werden sollen, x und y sind auch beliebige reelle Zahlen.

- $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$ und $\frac{a}{b}^x = \frac{a^x}{b^x}$
- $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ und $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

- $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$
- $a^0 := 1$ (:= ... per definitionem), das gilt auch für $a = 0$!
- $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$, hier muss man aufpassen, denn Division durch 0 ist nicht erlaubt, daher darf a nicht 0 sein
- $a^{\frac{x}{y}} = \sqrt[y]{a^x}$

Beispiele:

- $\frac{(a^3)^5 \cdot b^{-2}}{c^{-\frac{1}{2}}} =$
- $a^2 \cdot a^3 \cdot \sqrt{b^{-4}} =$
- $\frac{a^3 \cdot c^{-\frac{1}{2}}}{a^2} =$