

Tropfendes Wasser zwischen Ordnung und Chaos

- Experimente zur nichtlinearen Dynamik

Beate Buttkus; H. Joachim Schlichting; Volkhard Nordmeier
Universität GH Essen

When ever you can, count
Francis Galton

Wie fallen Wassertropfen?

Das schlafraubende Tropfen eines undichten Wasserhahns ist wohl jedem bekannt. Das Unangenehme besteht offenbar in der Regelmäßigkeit des Geräuschs, das durch das Auftreffen der Tropfen verursacht wird. Es scheint, als raste unsere Aufmerksamkeit auf den einfachen Tropfrhythmus ein, wodurch wir gezwungen werden, die ewige Wiederholung mitzumachen.

Im Altertum hat man aus dieser Not eine Tugend, gemacht, indem man die Regelmäßigkeit des tropfenweisen Auslaufens von Wasser aus einem eigens dafür gefertigten Gefäß ausnutzte, um die Zeit zu messen. Die Ägypter erreichten mit solchen Wasseruhren eine Genauigkeit, mit der sie präzise astronomische Messungen vornehmen konnten.

Die Regelmäßigkeit, mit der eine solche Wasseruhr funktioniert, legt es nahe, ein einfaches "Uhrwerk" der Tropfenbildung zu unterstellen: Unterhalb einer bestimmten Ausflugeschwindigkeit ist die Oberflächenspannung des Wassers so groß, daß sich das aus einer Öffnung auslaufende Wasser in einem allmählich wachsenden Tropfen ansammelt, bis dieser so schwer ist, daß die Oberflächenspannung nicht mehr ausreicht, ihn noch länger an der Öffnung der Tropfstelle festzuhalten. Der Tropfen reißt ab und fällt. Das weiterhin kontinuierlich nachströmende Wasser beginnt sofort mit der Bildung eines neuen Tropfen, der dann dasselbe Schicksal erleidet. Solange die Bedingungen sich nicht ändern, ist es schwer, sich vorzustellen, daß etwas anderes passierte.

Dennoch weiß man und beginnt sich in jüngster Zeit dafür auch physikalisch zu interessieren, daß sich eine solche "Tropfwasseruhr" von üblichen Uhren erheblich unterscheidet. Sie ist, *mit Christian Morgenstern* zu sprechen, "anderer Art, reagiert mimosisch zart" und kann daher außer einem regelmäßigen ein unregelmäßiges Verhalten zeigen, denn

"Selbst als Uhr, mit ihren Zeiten, will sie nicht Prinzipien reiten. Zwar ein Werk, wie allerwärts, doch zugleich ein Werk - mit Herz."

Um dieses Uhrwerk mit Herz geht es uns im folgenden. Das "mimosisch zarte" Verhalten tropfenden Wassers bedeutet, daß die Tropfenbildung sensitiv von den Anfangsbedingungen abhängt, so daß man den Zeitpunkt, in dem der nächste Tropfen fällt, nicht vorhersagen kann.

In der Sprache der nichtlinearen Dynamik sagt man, ein solches System sei chaotisch: Je nach der Größe eines geeigneten Kontrollparameters verhält sich ein chaotisches System sowohl regelmäßig als auch in nicht vorhersagbarer Weise unregelmäßig.

Seitdem *O.E. Rössler* den tropfenden Wasserhahn als möglichen Kandidaten eines chaotischen Systems diskutierte [4], sind zahlreiche Untersuchungen dieses Systems vorgenommen worden (vgl. z.B. [1], [2], [3], [6], [7], [10], [11]). Die dort beschriebenen Versuchsaufbauten sind jedoch teilweise so aufwendig und kompliziert, daß sie uns im Rahmen der Schulphysik nur schwer zugänglich erscheinen. Im folgenden wird daher eine Alternative vorgestellt, in der wir versuchen, so einfach und durchschaubar wie möglich die wesentlichen Verhaltensweisen des tropfenden Wassers darzustellen.

Aber nicht nur die Erreichung der Ergebnisse und die damit verbundene Einführung in den Bereich der nichtlinearen Dynamik erscheinen uns wert, diesen Versuch beispielsweise in der Oberstufe des Gymnasiums durchzuführen. Indem zur Erlangung der Versuchsergebnisse auch klassische Inhalte und Methoden erarbeitet und verständnisvoll angewendet werden müssen, kommt es außerdem zu einem vertieften Verständnis des üblichen Stoffes.

Aus diesem Grund beschränken wir uns im folgenden nicht nur auf die Darstellung der Ergebnisse, sondern bemühen uns, die Durchführung des Experimentes gleichrangig zu beschreiben. Aus Platzgründen müssen wir auf eine Wiederholung von Begriffen und Zusammenhängen der nichtlinearen Physik verzichten und verweisen auf entsprechende Darstellungen in der Literatur (vgl. [5], [8], [9]).

Komplexe Dynamik

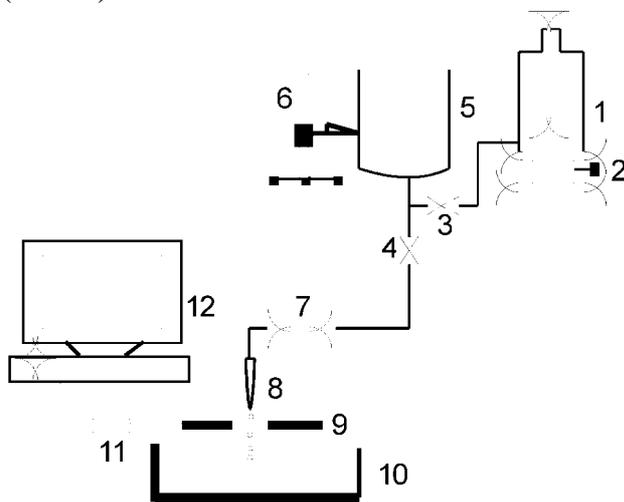
Die chaotische Tropffolge verrät uns zunächst nur, daß der Mechanismus, dem sich die Entstehung der Tropfen verdankt, nicht auf einen einfachen Schwingungsvorgang zurückgeführt werden kann, wie er sich etwa aus einer einfachen Folge von Anschwellen und Ablösen der Tropfen ergäbe. Die Schwingung muß komplexer sein und durch mindestens drei Variablen beschrieben werden.

Wie kann man sich eine solche Schwingung vorstellen? *O.E. Rössler* hat darauf hingewiesen, daß man es mit einer Kopplung zweier Schwingungen zu tun hat. Neben der bereits erwähnten Schwingung aufgrund des Anschwellens und Ablöses des Tropfens ist das gedämpfte Zurückschwingen des nach dem Abtropfen zurückbleibenden Resttropfens in Rechnung zu stellen. Damit wird der Blick von den fallenden Tropfen auf ein gekoppeltes Schwingungssystem gerichtet, das an der Ausflußöffnung agiert. Mit der Beobachtung der fallenden Tropfen verfügen wir daher nur über eine Momentaufnahme des gesamten Systemverhaltens. Das Problem besteht darin, mit dieser drastisch reduzierten Information dennoch ein möglichst zutreffendes Bild vom Verhalten des zugrundeliegenden chaotischen Schwingungssystems zu erhalten.

Bei der Verfolgung dieses Ziels wird versucht, durch den konkreten Aufbau des Systems dafür zu sorgen, daß keine zusätzliche Komplexität ins Spiel kommt. Paradoxerweise ist dies nur dadurch zu erreichen, daß man eine entsprechend größere Komplexität im Versuchsaufbau in Kauf nimmt: Um beispielsweise zu erreichen, daß die Tropfenbildung nicht schon durch turbulent anströmendes Wassers in unkontrollierbarer Weise beeinflußt wird, muß in das Wasserleitungssystem unmittelbar vor der Ausflußöffnung eine waagrecht angeordnete Kapillare mit geeignetem Querschnitt eingebaut werden, die für eine "Beruhigung" des Wassers sorgt. Aus demselben Grund muß die Austropfföffnung möglichst klein gewählt werden.

Meßmethoden und Versuchsaufbau

Als einzige in einfacher Weise registrierbare "Äußerung" des Systems kommt der Abstand aufeinanderfolgender Tropfen in Frage. Dieser Tropfabstand fungiert als der Ordnungsparameter des Systems. Wir registrieren ihn mit Hilfe einer Lichtschranke und verarbeiten die Signale mit einem angeschlossenen Computer (Abb.1). Als Kontrollparameter dient uns der Wasserstrom bzw. die Fließrate. Da die Fließrate proportional ist zur Wasserhöhe im Auslaufgefäß (Hagen-Poiseuille), laufen unsere Messungen darauf hinaus, die Tropfabstände bei verschiedenen Wasserhöhen zu messen, die mit Hilfe eines höhenverstellbaren Labortisches eingestellt werden. Die Qualität der Messungen hängt sehr empfindlich vom exakten Ablesen und der Konstanz der Wasserhöhe während der Messung ab. Das ist nicht ohne Hilfsmittel möglich. Wir verwenden zum Ablesen einen Präzisionsmaßstab und zur Aufrechterhaltung einer konstanten Wasserhöhe die sogenannte *Mariottesche Flasche* (Abb.1).



- 1 Mariottesche Flasche
- 2 höhenverstellbarer Labortisch
- 3,4 Absperrhahn
- 5 Auslaufgefäß
- 6 Maßstab
- 7 Kapillare
- 8 Austropfpipette
- 9 Lichtschranke
- 10 Auffangbehälter
- 11 Interface
- 12 Computer

Abb. 1: Schematischer Aufbau des Versuchs

Außerdem muß dafür Sorge getragen werden, daß man auch wirklich das Endverhalten des Systems erfaßt. Dies ist vor allem im chaotischen Bereich nicht ohne weiteres an den Meßergebnissen selbst zu erkennen. Daher muß man bei jeder Messung eine gewisse Zeit warten, bis sich die Transienten aufgrund von Schwankungen des Wasserspiegels abgebaut haben.

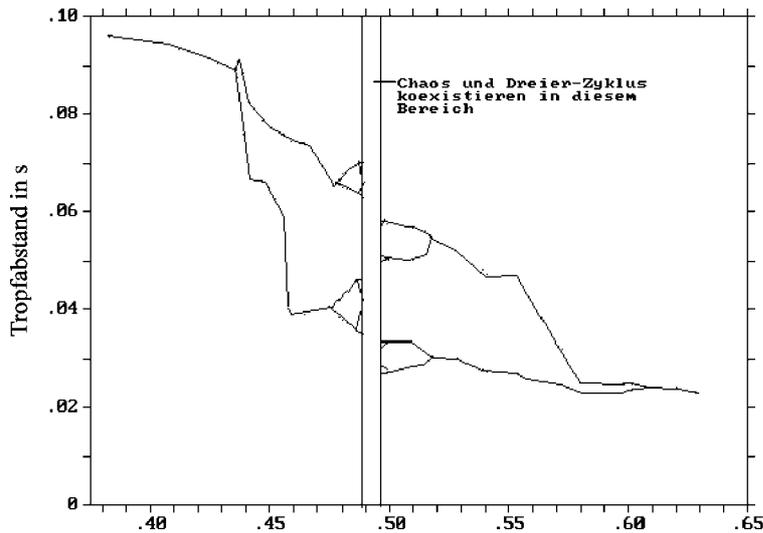
Meßergebnisse

Tropfspektrum

Um einen "groben Überblick" über das Tropfverhalten des Systems zu erhalten, bestimmen wir zunächst das Tropfspektrum des Systems. Dabei registrieren wir die Tropfabstände während das Auslaufgefäß langsam leerläuft und dabei die Wasserhöhe kontinuierlich abnimmt. Erwartungsgemäß gewährt das Tropfspektrum nur eine unvollkommene Einsicht in das tatsächliche Systemverhalten. Denn brauchbare Meßwerte erhält man auf diese Weise

nur in Bereichen, die so groß sind, daß das System das jeweils typische Endverhalten annehmen kann, bevor durch die abnehmende Füllhöhe bereits ein neuer Bereich mit anderem Endverhalten erreicht wird. Für zwischen derart stabilen Bereichen liegende Füllhöhen, zeigen die Meßwerte natürlich nur transientes Chaos an und müssen einer sorgfältigen Untersuchung unterzogen werden.

Bifurkationen



Dazu wird die Wasserhöhe im Auslaufgefäß systematisch variiert, indem sie jeweils so lange konstant auf den Wert der vorgesehenen Fließrate gehalten wird, bis man davon ausgehen kann, daß das Endverhalten erreicht ist. Um dies nicht im einzelnen kontrollieren zu müssen, gehen wir in der Regel davon aus, daß stabiles Endverhalten vorliegt, wenn 1000 Tropfen mit konstantem Abstand registriert werden. In der Nähe

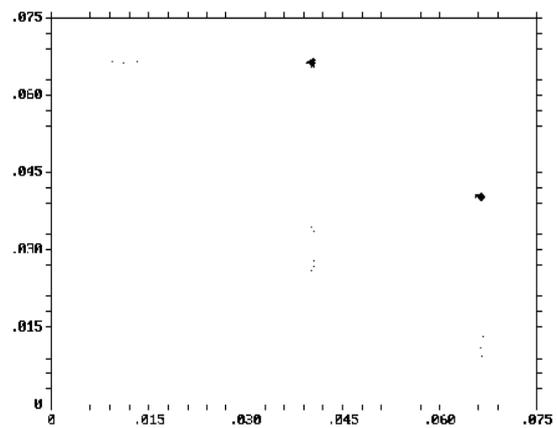
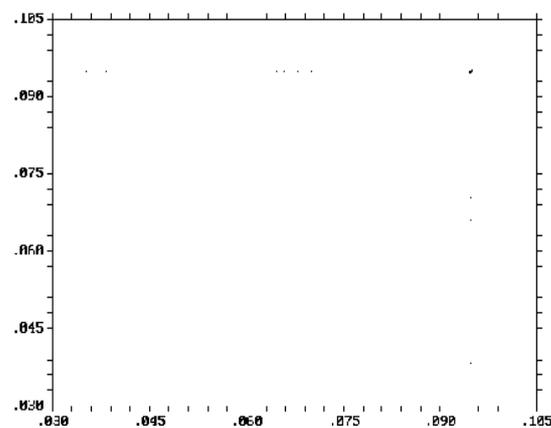
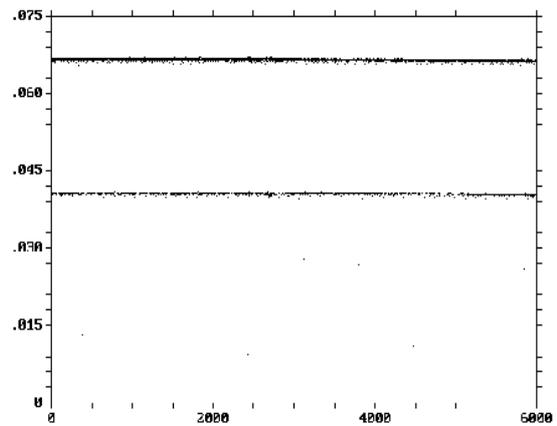
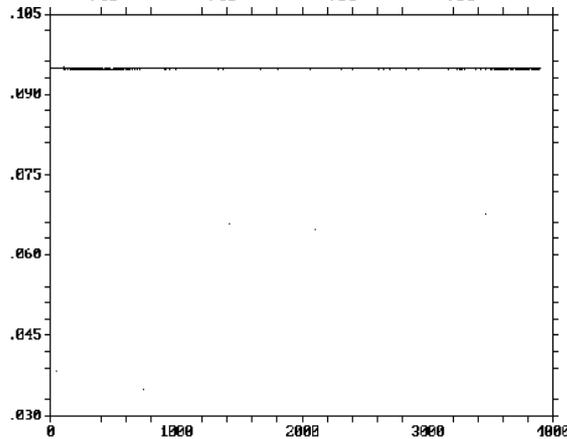
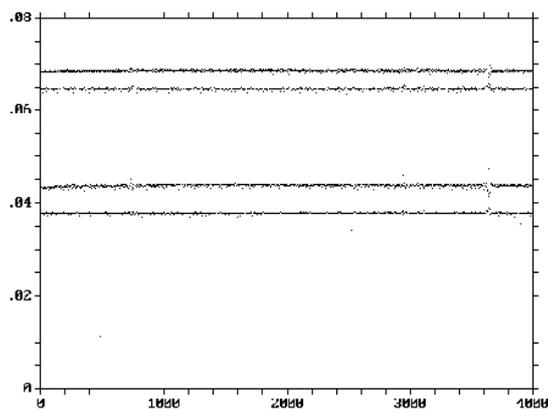
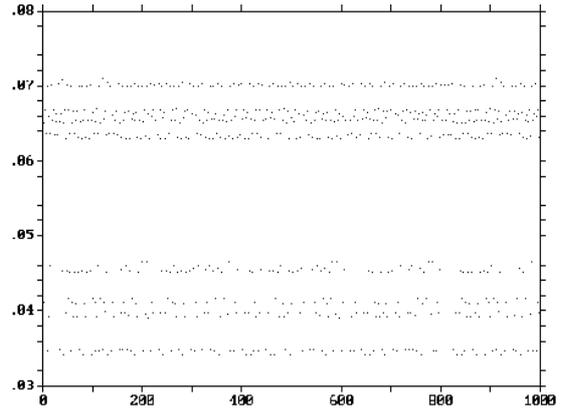


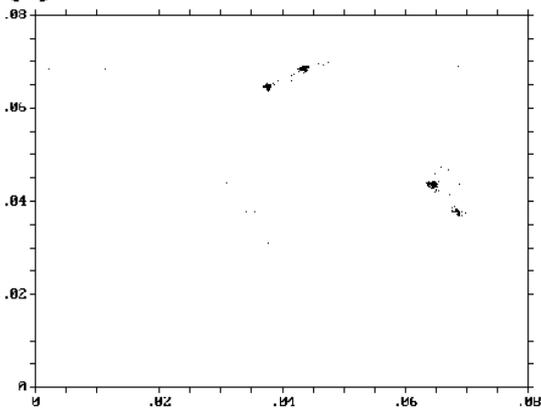
Abb. 3: a), b) Tropfdiagramm, c), d) Return- Map (Erläuterungen siehe Text)



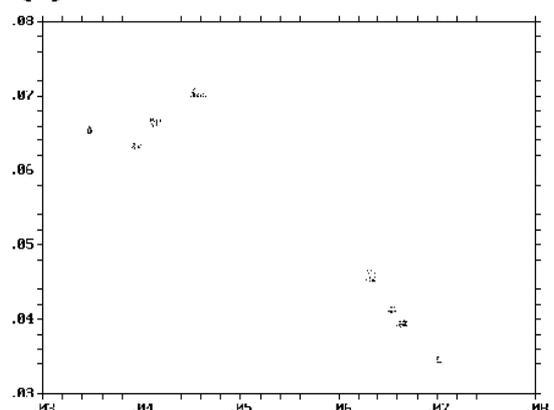
(a)



(b)



(c)



(d)

von Bifurkationspunkten reicht auch das nicht immer aus. Die Sensitivität des Systems liegt an diesen Stellen offenbar unterhalb der Genauigkeit unseres experimentellen Aufbaus.

In den folgenden Meßreihen werden zunächst die Tropfabstände als Funktion der Fließrate dargestellt. Wie das Bifurkationsdiagramm (Abb.2) zeigt, stellt man bei einer Fließrate von 0,4 ml/s ein reguläres Verhalten fest. Die Tropfen fallen mit konstantem Abstand. Man spricht von einem Einer-Zyklus (s. Abb.3 (a), (c) $v=0,422$ ml/s). Unterhalb von 0,4 ml/s bleibt dieses Verhalten bestehen und wird nicht weiter verfolgt. Steigert man die Fließrate, so spaltet sich der Einer-Zyklus bei einem Wert von 0,435 ml/s in einen Zweier-Zyklus auf. Zu jedem Wert einer Fließrate erhält man zwei verschiedene Tropfabstände. Die Tropfabstände alternieren zwischen zwei Werten, was im Tropfdiagramm (dort wird der Tropfabstand gegen die Anzahl der Tropfen aufgetragen) durch zwei Punktfolgen zum Ausdruck kommt (Abb.3 (b) $v=0,470$ ml/s). Bei einer Fließrate von etwa 0,477 ml/s kommt es zu einer weiteren Bifurkation. Der Zweier-Zyklus spaltet sich in einen Vierer-Zyklus auf: Jedem Wert der Fließrate entsprechen jetzt vier Tropfabstände (Abb.4 (a), (c) $v=0,482$ ml/s). Da die Abstände zwischen den Bifurkationspunkten immer kleiner werden und das System außerdem in der Nähe der Bifurkationspunkte besonders empfindlich gegen Störungen reagiert, ist uns die Registrierung eines regulären Achter-Zyklus nur an einer Stelle bei einem Wert von 0,488 ml/s gelungen (Abb.4 (b), (d)). Jede Messung unterhalb dieses Wertes führte auf einen Vierer-Zyklus und jede Messung oberhalb zu chaotischem Verhalten, d.h. zum Auftreten beliebiger Tropfabstände bei gegebenen Fließraten.

Dieses Szenario, nach dem das System (mit zunehmenden oder abnehmenden Kontrollparameter) über eine Sequenz von Periodenverdopplungen (nach einem ihrem Entdecker auch *Feigenbaum-Szenario* genannt) vom regulären ins chaotische Verhalten übergeht, wird bei vielen nichtlinearen Systemen angetroffen und weist universelle Züge auf (vgl. [8], [9]). Beispielsweise konvergiert das Abstandsverhältnis benachbarter Bifurkationspunkte gegen die universelle *Feigenbaum-Konstante*, mit einem Wert von 4,6692. Mit Hil-

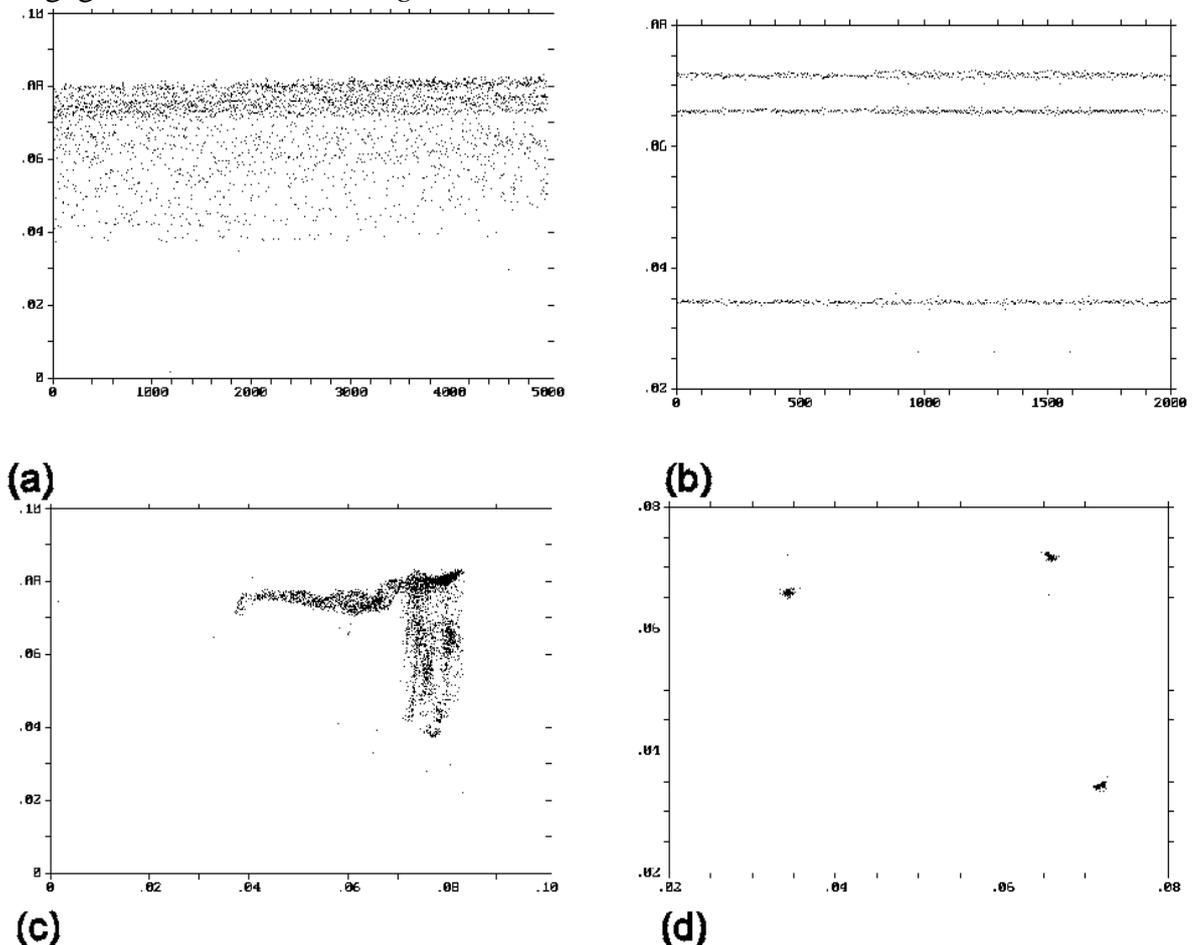


Abb. 5: a), b) Tropfdiagramm; c), d) Return- Map (Erläuterungen siehe Text).

fe von Meßwerten, die wir beim "tropfenden Wasserhahn" gewonnen haben, kommen wir diesem Wert mit 4,66 erstaunlich nahe.

Entgegen der von anderen Systemen bekannten Beobachtung, daß chaotisches Verhalten in einem relativ breiten Bereich auftritt, läßt sich beim "Tropfenden Wasserhahn" nur ein relativ schmalbandiger chaotischer Bereich zwischen Fließraten von 0,488 ml/s und 0,496 ml/s ausmachen. Bei höheren Fließraten stellt man nämlich wieder reguläres Verhalten fest und zwar so, daß sich das System über das Szenario eines "umgekehrten Feigenbaums" wieder zu einem regulären Einer-Zyklus „zurückentwickelt“. Auch für dieses Szenario konnte die *Feigenbaum-Konstante* mit einem Wert von 4,74 abgeschätzt werden.

Bei noch höheren Fließraten geraten wir an die Grenzen des mit unserer einfachen Apparatur erreichbaren Auflösungsvermögens.

Neben der Darstellung des Systemverhaltens in Form von Tropfendiagrammen sind sogenannte *Return-Maps* üblich. Darin werden jeweils aufeinanderfolgende Tropfabstände gegeneinander aufgetragen. Ein Einer-Zyklus ist demnach im Idealfall durch einen Punkt, ein

Zweier-Zyklus durch zwei Punkte usw. charakterisiert. Der Vorteil solcher Return-Maps besteht darin, daß sich das Endverhalten auch in Situationen, in denen dem Tropfdiagramm noch kein eindeutiges Endverhalten anzusehen ist, in einem charakteristischen Punktmuster manifestiert. Dies ist nicht nur während der Suche nach Verzweigungspunkten im regulären Bereich von Bedeutung, sondern auch im chaotischen Bereich. Der chaotische Bereich zeichnet sich nämlich in einer Return-Map als relativ kompaktes Gebilde aus (vgl. [12]). Auf diese Weise kann es von sonstigem irregulären, etwa stochastischen Verhalten unterschieden werden. Beispielsweise weist die kompakte Return-Map (Abb.5 (c)) bei einer Fließrate von 0,493 ml/s auf chaotisches Verhalten hin.

Weitere Attraktoren

In manchen Fällen erhält man innerhalb des chaotischen Bereichs, z. B. bei einer Fließrate von 0,493 einen Dreier-Zyklus. Dies ist ein Hinweis darauf, daß der chaotische Attraktor

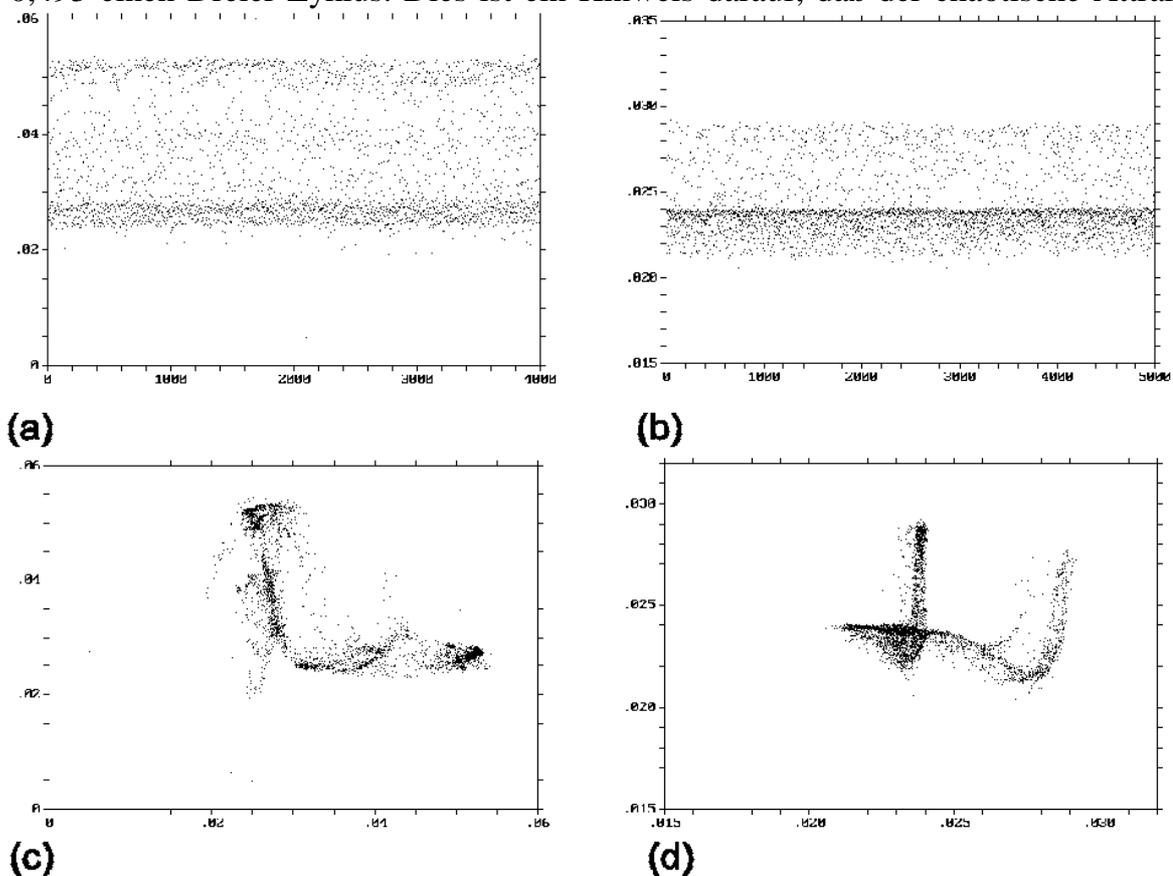


Abb. 6: (a),(b) Tropfdiagramm; (c),(d) Return-Map (Erläuterungen siehe Text) des Systems mit einem regulären Dreier-Attraktor koexistiert.

Es stellt sich nun die Frage, wie der Übergang vom regulären Einer-Zyklus zum irregulären Verhalten ab einer Fließrate von 0,628 ml/s aussieht. Bei einer Fließrate von 0,638 ml/s entsteht ein relativ gleichmäßig strukturiertes Gebilde. Vermutlich existiert auch hier ein chaotischer Attraktor (Abb.6 (c)). Da man keinen Zweier-Zyklus in diesem Bereich findet, besteht die Möglichkeit, daß sich das System nicht über eine Sequenz von Periodenverdopplungen ins Chaos begibt, sondern daß es einen anderen Übergang vollzieht. Bei einer Fließrate von 0,693 ml/s findet man einen regulären Dreier-Zyklus. Bei einer Fließrate von

0,672 ml/s tritt wieder ein kompaktes Gebilde auf (Abb.6 (d)). Auch hier kann die Existenz eines chaotischen Attraktors vermutet werden. Auf welche Weise sich der Übergang vom Dreier-Zyklus ins Chaos vollzieht, konnte nicht festgestellt werden.

Zusammenfassung

Der "tropfende Wasserhahn" wird mit relativ einfachen Mitteln untersucht und als chaotisches System mit regulären und chaotischen Bereichen identifiziert.

Als interessant erweist sich dabei zum einen, daß trotz der spärlichen Informationen, die dem System des nichtlinearen Oszillators am Ausgang einer Wasserhahn- bzw. Pipettenöffnung in Form von Tropfen entlockt werden, weitreichende Aussagen über das Systemverhalten erzielt werden können. Durch geschicktes Zählen der Tropfen können nicht nur einzelne reguläre und chaotische Bereiche ausgemacht, sondern darüber hinaus kann ein relativ detaillierter Überblick über das Gesamtverhalten in Form zweier "Feigenbäume" gewonnen werden.

Indem das System im Unterschied zu vielen anderen dynamischen Systemen bei einem naiven Zugang sein wahres Verhalten hinter einem Gespinnst von transienten Strukturen "versteckt", wird man schrittweise gezwungen, den Versuchsaufbau zu optimieren, Störquellen zu vermeiden und zunächst unzugänglich erscheinende Bereiche indirekt zu erschließen. Dabei lernt man eine Menge über das merkwürdige nichtlineare System, aber auch eine Menge an experimenteller klassischer Physik.

Anmerkung: Diese Arbeit ist die geringfügig veränderte Version einer Zeitschriftenpublikation (Physik in der Schule 33/2, 67-71 (1995)). Da seit dem Abschluß der Experimente im Jahre 1993 weitete Publikationen zu dieser Thematik erschienen sind haben wir einige Hinweise darauf hinzugefügt ([13] - [15]).

Literatur

- [1] Austin, J.: A mechanical treatment to the leaky faucet experiment. In: Physics Letters A, (2,3) 155 (1991) S.148.
- [2] Bernhardt, P.A.: The autonomous chaotic relaxation oscillator: An electrical analogue to the dripping faucet. In: Physica D, 52 (1991) S.489.
- [3] Dreyer, K.; Hickey, F.R.: The route to chaos in a dripping water faucet. In: American Journal of Physics, (7) 59 (1991) S. 619.
- [4] Haken, H.: Synergetics: A Workshop. Springer Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1977.
- [5] Heinrichs, G.: Chaos - Einführung in eine neue physikalische Theorie. Aulis Verlag Deubner & Co KG, Köln, 1992.
- [6] Martien, P.; Pope, S.C.; Scott, P.L.; Shaw, R.S.: The Chaotic Behavior Of The Leaky Faucet. In: Physics Letters A, 110 (1985) S. 399.
- [7] Nunez Yopez, H.N.M.; Salas Brito, A.L.; Vicente, L.A.; Vargar, C.A.: Chaos in a dripping faucet. In: European Journal of Physics, 10 (1989) S. 99.
- [8] Schlichting, H.J.: Strukturen im Chaos - einfache Systeme als Zugang zu einem neuen Forschungsbereich der modernen Physik. In: physica didacta, 1/18 (1991) S.14.
- [9] Schlichting, H.J.; Backhaus, U.; Küpker, H.G.: Chaos beim Wasserrad - ein einfaches

- mechanisches Modell für das Lorenzsystem. In: Physik und Didaktik, 3/19 (1991) S.196.
- [10] Shaw, R.: The Dripping Faucet as a Modell Chaotic System. Aerial Press Inc., Santa Cruz, 1984.
- [11] Wu, X.; Tekle, E.; Schelly, Z.A.: Dripping faucet apparatus with temperature and high-resolution timing and flow rate controls. In: Review of Scientific Instruments, 12/60 (1989).
- [12] Nordmeier, V.; Schlichting, H.J.: Auf der Suche nach Strukturen komplexer Phänomene. In: Praxis der Naturwissenschaften, 1/45 (1996), S.22.
- [13] Sartorelli, J.C.; Gonclaves, W.M.; Pinto, R.D.: Crisis and intermittence in a leaky-faucet experiment. In: Physical Review E, 5/49 (1994) S.3963.
- [14] Sánchez-Ortiz, G.I.; Salas-Brito, A.L.: Strange attractors in a relaxation oscillator model for the dripping water faucet. In: Physics Letters A, 203 (1995) S.300.
- [15] Sternemann, W.: Der chaotische Wassertropfen - zu seinen Möglichkeiten in der Schule. In: Computer und Unterricht, 14 (1994) S.22.